Θεώρημα: (Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας με ακολουθίες)
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος ακολουθιών έχουμε ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n - y_n \to 0$ να ισχύει $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Απόδειξη:
($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θεωρούμε τυχαίες ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n - y_n \to 0$. Θ.δ.ο. $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta > 0$ ώστε αν $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (*)
Επειδή $x_n - y_n \to 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ να ισχύει $|x_n - y_n| < \delta$.
Έτσι, $\forall n \geq n_0$ ισχύει $|x_n - y_n| < \delta$ άρα από την (*) έχω $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$.
Άρα, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι αν $x_n - y_n \to 0$ τότε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ και Θ.δ.ο. η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Τότε, $\exists \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε:
$\forall \delta > 0$ $\exists x, y \in A$ για τα οποία $|x-y| < \delta$ και $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ (**)
Από την (**) για $\delta = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ συμπεραίνουμε ότι $\exists x_n, y_n \in A$ με
$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Τότε, $x_n - y_n \to 0$ άρα από υπόθεση $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Άτοπο!
Καθώς $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

Παρατήρηση: Το θεώρημα αυτό είναι ο κύριος τρόπος για να δείχνουμε ότι μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αρκεί να βρούμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A ώστε $x_n - y_n \to 0$ και $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Παραδείγματα

α) $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$.

Θέτουμε $x_n=\frac{1}{n}$ και $y_n=\frac{1}{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Τότε, $x_n,y_n\in(0,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$x_n-y_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}\to 0$ όμως $f(x_n)-f(y_n)=f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{2n})=n-2n=-n\to-\infty\neq 0$.

Άρα, η f όχι ομοιόμορφα συνεχής.

β) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$.

Θέτουμε $x_n=n+\frac{1}{n}$ και $y_n=n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Τότε, $x_n-y_n=\frac{1}{n}\to 0$ όμως $f(x_n)-f(y_n)=(n+\frac{1}{n})^2-n^2=n^2+2+\frac{1}{n^2}-n^2=2+\frac{1}{n^2}\to 2\neq 0$.

Άρα, η f όχι ομοιόμορφα συνεχής.

γ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=\sin(x^2)$.

Η f είναι συνεχής, φραγμένη αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής

Θέτουμε $x_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ και $y_n=\sqrt{2n\pi}$

$$x_n-y_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2n\pi}=\frac{\cancel{2n\pi}+\frac{\pi}{2}-\cancel{2n\pi}}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2n\pi}}\to 0.$$

$f(x_n)-f(y_n)=\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})-\sin(2n\pi)\to 1\neq 0$.

Άρα, η f όχι ομοιόμορφα συνεχής.

Θεώρημα: (Θεμελιώδες Θεώρημα Συνεχών Συναρτήσεων)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Αν η f συνεχής, τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Τότε, $\exists\varepsilon>0$ ώστε:

(I) $\forall\delta>0$ $\exists x,y\in[a,b]$ με $|x-y|<\delta$ και $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$.

Εφαρμόζοντας την (I) για $\delta=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$

βρίσκουμε $x_n,y_n\in[a,b]$ με $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ και $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$.

Έτσι, $x_n-y_n\to 0$ και $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Επειδή $a\leq x_n\leq b$ $\forall n$, η x_n είναι

φραγμένη, άρα από Θεώρημα Bolzano-

- Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δηλαδή, $\exists (x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x\in\mathbb{R}$ ώστε $x_{k_n}\to x$.

Επειδή $a\le x_{k_n}\le b$ $\forall n\in\mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι $a\le x\le b$. Δηλαδή, $x\in[a,b]$.

$y_{k_n}=x_{k_n}-(x_{k_n}-y_{k_n})\to x-0=x$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x και $x_{k_n}\to x$, $y_{k_n}\to x$ από την αρχή της μεταφοράς έχω: $f(x_{k_n})\to f(x)$ και $f(y_{k_n})\to f(x)$. Άρα, $f(x_{k_n})-f(y_{k_n})\to 0$.

Άτοπο! Διότι $|f(x_{k_n})-f(y_{k_n})|\ge\varepsilon$ $\forall n$. Επομένως, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θεώρημα: Αν $f:A\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική-Cauchy ακολουθία στο A, τότε η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη:

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στο A. Θ.δ.ο. η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f ομοιόμορφα συνεχής $\exists\delta>0$ ώστε $\forall x,y\in A$ αν $|x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. (*) Επειδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n,m\ge n_0$ να ισχύει $|x_n-x_m|<\delta$. Από (*) $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.

Επομένως, η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Παρατήρηση: Αν $f:A\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $B\subseteq A$, τότε ο περιορισμός της f στο B (δηλαδή $g=f|_B$) είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θεώρημα: Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to a^+}f(x)$ και $\lim_{x\to b^-}f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απόδειξη:

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{t\to a^+}f(t)$ και $\lim_{t\to b^-}f(t)$.

Επεκτείνουμε την f στο $[a,b]$.

Ορίζουμε δηλαδή $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\begin{cases}\lim_{t\to a^+}f(t), & x=a\\ f(x), & a<x<b\\ \lim_{t\to b^-}f(t), & x=b\end{cases}$.

Η $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Άρα (αφού το π.ο. είναι κλειστό διάστημα [α,β]) είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα, αφού $f = g|(a,b)$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. (4)

($\Rightarrow$) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και θα δείξουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x\to a^+} f(x)$. Η ύπαρξη του άλλου ορίου βγαίνει όμοια.

<u>Ισχυρισμός:</u> Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy με $x_n\to a$, τότε η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

<u>Απόδειξη:</u>

Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy άρα συγκλίνει. Δηλαδή, $\exists \ell\in\mathbb{R}: f(x_n)\to\ell$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell$. Έστω τυχαία ακολουθία (y_n) στο (a,b), με $y_n\to a$. Εφόσον $x_n\to a$, $y_n\to a$ έχουμε $x_n-y_n\to 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής $f(x_n)-f(y_n)\to 0$.

$f(y_n)=f(x_n)-(f(x_n)-f(y_n))\to \ell-0=\ell$. Επομένως, $\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell$.